1

FISICA CUANTICA II
CONTROL DE MAYO, PROBLEMAS

CURSO 2024/2025 30 de Mayo de 2025

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado. Este examen cuenta un 75% de la nota.

1[3].- En un espacio de Hilbert de dimension 3 el hamiltoniano del sistema es:

$$H = \hbar\Big(|E_1\rangle\langle E_1| + 2|E_2\rangle\langle E_2| + 3|E_3\rangle\langle E_3|\Big) ,$$

donde $\langle E_i|E_j\rangle = \delta_{ij}$. En el instante inicial $t = 0$ el sistema esta en un estado $|\psi\rangle$ tal que:

$$\langle E_1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} , \qquad \langle E_2|\psi\rangle = \frac{i}{2} , \qquad \langle E_3|\psi\rangle = \frac{1}{2} .$$

Transcurrido un tiempo $t > 0$ se mide el observable:

$$A = |E_2\rangle\langle E_1| + |E_1\rangle\langle E_2| + 2|E_3\rangle\langle E_3| .$$

a) ¿Que valores se pueden obtener en esta medida de A?.

b)¿Cuales son las probabilidades, en funcion del tiempo t, de obtener los diferentes resultados del apartado anterior?.

2[3]. Los experimentales Alice y Bob efectuan medidas en el estado de dos particulas de espin 1/2 siguiente:

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|+,-\rangle + |-,+\rangle + |+,+\rangle\Big) ,$$

siendo:

$$|+,-\rangle = |+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 , \qquad |-,+\rangle = |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 , \qquad |+,+\rangle = |+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 ,$$

y $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$. Alice mide el espin de la particula 1 a lo largo de la direccion x y Bob mide la componente x del espin de la particula 2. Obtengase la probabilidad de que las medidas de Alice y Bob den el mismo resultado.

3[4].- Un sistema formado por una particula de espin 1/2 y un oscilador armonico esta en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|A\rangle \otimes |\alpha\rangle + |B\rangle \otimes |\beta\rangle\Big) ,$$

siendo $|A\rangle$ y $|B\rangle$ los siguientes estados de la particula de espin 1/2:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} , \qquad |B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

y $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son los siguientes estados del oscilador:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) , \qquad |\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) ,$$

donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son respectivamente el estado fundamental y el primer estado excitado del oscilador.

a) Obtengase la matriz densidad reducida del oscilador.

b) Calculese la pureza de la matriz densidad obtenida en el apartado anterior.

c) ¿Cuanto valen los valores medios de la posicion y momento del oscilador en el estado $|\psi\rangle$?.

En un espacio de Hilbert de dimension 3 el hamiltoniano del sistema es:

$$H = \hbar\left[\,|E_1\rangle\langle E_1| + 2|E_2\rangle\langle E_2| + 3|E_3\rangle\langle E_3|\,\right]$$

donde $\langle E_i|E_j\rangle = \delta_{ij}$. En el instante inicial $t=0$ el sistema esta en un estado $|\psi\rangle$ tal que:

$$\langle E_1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \langle E_2|\psi\rangle = \frac{i}{2} \quad , \quad \langle E_3|\psi\rangle = 1/2$$

Transcurrido un tiempo $t>0$, se mide el observable

$$A = |E_2\rangle\langle E_1| + |E_1\rangle\langle E_2| + 2\,|E_3\rangle\langle E_3|$$

1) ¿Que valores se pueden obtener en esta medida de A?,

2) ¿Cuales son las probabilidades de obtener los diferentes resultados del apartado anterior?

---

1) Los autovectores y autovalores de A son $(A|\phi_a\rangle = a|\phi_a\rangle)$:

$\rightarrow |\phi_{+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_1\rangle + |E_2\rangle\right) \Rightarrow \boxed{a=+1}$

$\rightarrow |\phi_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_1\rangle - |E_2\rangle\right) \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$\rightarrow |\phi_2\rangle = |E_3\rangle \longrightarrow \boxed{a=2}$

2) Pongamos $E_1 = \hbar$, $E_2 = 2\hbar$, $E_3 = 3\hbar$.
El estado en $t=0$ es

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \frac{i}{2}|E_2\rangle + \frac{1}{2}|E_3\rangle$$

Para $t>0$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i/\hbar E_1 t}|E_1\rangle + \frac{i}{2} e^{-i/\hbar E_2 t}|E_2\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} e^{-i/\hbar E_3 t}|E_3\rangle \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-it}}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \frac{i e^{-2it}}{2}|E_2\rangle + \frac{e^{-3it}}{2}|E_3\rangle}$$

Calculemos las probabilidades de los diferentes resultados en las medidas de A

$$P(a=1,t) = |\langle\phi_{+1}|\psi(t)\rangle|^2$$

$$\langle\phi_{+1}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle E_1| + \langle E_2|)\left(\frac{e^{-it}}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \frac{ie^{-2it}}{2}|E_2\rangle + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-3it}}{2}|E_3\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\phi_{+1}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{-it} + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-2it}\right)}$$

$$|\langle\phi_{+1}|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left(e^{-it} + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-2it}\right)\left(e^{it} - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{2it}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[1 \underbrace{- \frac{i}{\sqrt{2}}e^{it} + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-it}}_{-\frac{i}{\sqrt{2}}(2i\,\mathrm{sen}\,t)} + 1/2\Big] = \frac{1}{4}\left(3/2 + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$$

$$\boxed{P(a=1,t) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\right)}$$

De forma similar:

$$\langle \phi_{-1} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle E_1| - \langle E_2|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-it} |E_1\rangle + \frac{i}{2} e^{-2it} |E_2\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-it} - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-2it}\right) \Rightarrow$$

$$P(a=-1,t) = |\langle \phi_{-1} | \psi(t) \rangle|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-it} - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-2it}\right)\left(e^{it} + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{2it}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[1 + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}} e^{it} - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-it}}_{\frac{i}{\sqrt{2}}(2i\,\text{sen}\,t)} + 1/2\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(a=-1,t) = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2} - \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\right]}$$

$$\langle \phi_{+2} | \psi(t) \rangle = \langle E_3 | \frac{1}{2} e^{-3it} |E_3\rangle = \frac{1}{2} e^{-3it}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(a=2,t) = \frac{1}{4}}$$

Los experimentales Alice y Bob efectuan medidas en el llamado estado de Hardy de dos partículas, de espín $\frac{1}{2}$, dado por:

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|+,-\rangle + |-,+\rangle + |+,+\rangle\right]$$

siendo $|+,-\rangle = |+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2$, $|-,+\rangle = |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2$, $|+,+\rangle = |+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2$ y $\sigma_z |\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$. Alice mide el espín de la partícula 1 a lo largo de la dirección x y Bob mide la componente x de la partícula 2. Obtengase la probabilidad de que las medidas de Alice y Bob den el mismo resultado

---

Sean

$$|+x,+x\rangle = |+x\rangle_1 \otimes |+x\rangle_2$$

$$|-x,-x\rangle = |-x\rangle_1 \otimes |-x\rangle_2$$

La probabilidad pedida es

$$P_= = \underbrace{|\langle +x,+x|H\rangle|^2}_{P_+} + \underbrace{|\langle -x,-x|H\rangle|^2}_{P_-} = P_+ + P_-$$

siendo $\quad |+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \qquad |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$

Calculo de P_+

$$\langle +x,+x|+,-\rangle = \underbrace{\langle +x|+\rangle}_{1/\sqrt{2}}\underbrace{\langle +x,-\rangle}_{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\langle +x, +x | -, + \rangle = \underbrace{\langle +x | - \rangle}_{1/\sqrt{2}} \underbrace{\langle +x | + \rangle}_{1/\sqrt{2}} = 1/2$$

$$\langle +x, +x | +, + \rangle = \underbrace{\langle +x | + \rangle}_{1/\sqrt{2}} \underbrace{\langle +x | + \rangle}_{1/\sqrt{2}} = 1/2$$

Entonces

$$\langle +x, +x | H \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1/2 + 1/2 + 1/2 \right) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_+ = 3/4}$$

Calculo de P_-

$$\langle -x, -x | +, - \rangle = \underbrace{\langle -x | + \rangle}_{1/\sqrt{2}} \underbrace{\langle -x | - \rangle}_{-1/\sqrt{2}} = -1/2$$

$$\langle -x, -x | -, + \rangle = \underbrace{\langle -x | - \rangle}_{-1/\sqrt{2}} \underbrace{\langle -x | + \rangle}_{1/\sqrt{2}} = -1/2$$

$$\langle -x, -x | +, + \rangle = \underbrace{\langle -x | + \rangle}_{1/\sqrt{2}} \underbrace{\langle -x | + \rangle}_{1/\sqrt{2}} = 1/2$$

$$\Rightarrow \langle -x, -x | H \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-1/2 \cancel{- 1/2} \cancel{+ 1/2} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_- = \frac{1}{12}}$$

$$P_= = \frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{9+1}{12} \Rightarrow \boxed{P_= = \frac{10}{12} = 5/6}$$

Un sistema formado por una partícula de espín ½ y un oscilador armónico está en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle \otimes |\alpha\rangle + |B\rangle \otimes |\beta\rangle\right)$$

siendo $|A\rangle$ y $|B\rangle$ los siguientes estados de la partícula de espín ½:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad |B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ los siguientes estados del oscilador:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \qquad |\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son respectivamente el estado fundamental y el primer estado excitado del oscilador.

1) Obténgase la matriz densidad reducida del oscilador
2) Calcúlese la pureza de la matriz densidad obtenida en el apartado anterior
3) ¿Cuánto valen los valores medios de los operadores posición y momento del oscilador en el estado $|\psi\rangle$?

Comprobemos primero que $|\psi\rangle$ está normalizada. Para ello necesitamos

$$\langle A|A\rangle = \langle B|B\rangle = 1, \qquad \langle \alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle = 1$$

Además

$$\langle \alpha|\beta\rangle = 0$$

y

$$\langle A|B\rangle = \frac{1}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+i) = \langle B|A\rangle^*$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle A|B\rangle = \tfrac{1}{2}(1+i)} \qquad \boxed{\langle B|A\rangle = \tfrac{1}{2}(1-i)}$$

Entonces

$$\langle\psi|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\langle A|\otimes\langle\alpha| + \langle B|\otimes\langle\beta|\right)\left(|A\rangle\otimes|\alpha\rangle + |B\rangle\otimes|\beta\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\langle A|A\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle}_{1} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\langle B|B\rangle\langle\beta|\beta\rangle}_{1} = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = 1 \rightarrow \text{OK!}$$

$\langle\alpha|\beta\rangle = 0$

1) La matriz densidad del sistema compuesto es:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left[|A,\alpha\rangle + |B,\beta\rangle\right]\left[\langle A,\alpha| + \langle B,\beta|\right] =$$

$$= \frac{1}{2}|A,\alpha\rangle\langle A,\alpha| + \tfrac{1}{2}|A,\alpha\rangle\langle B,\beta| + \tfrac{1}{2}|B,\beta\rangle\langle A,\alpha| + \tfrac{1}{2}|B,\beta\rangle\langle B,\beta|$$

Queremos calcular $\rho_2 = \mathrm{Tr}_1\,\rho$.

$$\mathrm{Tr}_1\left[|A,\alpha\rangle\langle A,\alpha|\right] = \langle A|A\rangle\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

$$\mathrm{Tr}_1\left[|A,\alpha\rangle\langle B,\beta|\right] = \langle B|A\rangle\,|\alpha\rangle\langle\beta| = \frac{1}{2}(1-i)\,|\alpha\rangle\langle\beta|$$

$$\mathrm{Tr}_1\left[|B,\beta\rangle\langle A,\alpha|\right] = \langle A|B\rangle\,|\beta\rangle\langle\alpha| = \tfrac{1}{2}(1+i)\,|\beta\rangle\langle\alpha|$$

$$\mathrm{Tr}_1\left[|B,\beta\rangle\langle B,\beta|\right] = \langle B|B\rangle\,|\beta\rangle\langle\beta| = |\beta\rangle\langle\beta|$$

$$\boxed{\rho_2 = \frac{1}{2}\left[|\alpha\rangle\langle\alpha| + \frac{1}{2}(1-i)\,|\alpha\rangle\langle\beta| + \frac{1}{2}(1+i)\,|\beta\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|\right]}$$

En terminos de los autoestados del hamiltoniano del oscilador armonico

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\right)$$

$$|\beta\rangle\langle\beta| = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta| = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}$$

$$|\alpha\rangle\langle\beta| = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\left(\langle 0| - \langle 1|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|\right)$$

$$\left[\,|\beta\rangle\langle\alpha| = \left(|\alpha\rangle\langle\beta|\right)^{\dagger} = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right)\right]$$

$$\frac{1-i}{2}|\alpha\rangle\langle\beta| + \frac{1+i}{2}|\beta\rangle\langle\alpha| =$$

$$= \frac{1-i}{4}\left[|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|\right] +$$

$$+ \frac{1+i}{4}\left[|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right] =$$

$$= \left(\frac{1-\cancel{i}+1+\cancel{i}}{4}\right)\left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right) + \frac{\cancel{1}-i-\cancel{1}-i}{4}|1\rangle\langle 0| +$$

$$+ \left(\frac{\cancel{1}+i-\cancel{1}+i}{4}\right)|0\rangle\langle 1| \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1-i}{2}|\alpha\rangle\langle\beta| + \frac{1+i}{2}|\beta\rangle\langle\alpha| = \\ &\qquad = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| - \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{i}{2}|0\rangle\langle 1| - \frac{i}{2}|1\rangle\langle 0|\end{aligned}}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\left[|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}\left[|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| + i\,|0\rangle\langle 1| - i\,|1\rangle\langle 0|\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_2 = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{i}{4}|0\rangle\langle 1| - \frac{i}{4}|1\rangle\langle 0|}$$

2) En el subespacio $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ la matriz densidad esta representada por la matriz 2x2

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & i/4 \\ -i/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Para calcular la pureza $P = Tr((\rho_2)^2)$ hacemos

$$(\rho_2)^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & i/4 \\ -i/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & i/4 \\ -i/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{16}+1/16 & - \\ - & 1/16 + 1/16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10/16 & - \\ - & 2/16 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \frac{12}{16} = 3/4 \Rightarrow \boxed{P = 3/4}$$

3)

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^{+}) \Rightarrow \langle X\rangle = Tr(X\rho_2)$$

$$\Rightarrow \langle X\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\omega}}\; Tr\left[(a + a^{+})\rho_2\right]$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \Rightarrow a|0\rangle = 0, \quad a|1\rangle = |0\rangle$$

$$a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \Rightarrow a^{+}|0\rangle = |1\rangle, \quad a^{+}|1\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle$$

$$a\rho_2 = \frac{1}{4}\underbrace{a|1\rangle}_{|0\rangle}\langle 1| - \frac{i}{4}\underbrace{a|1\rangle}_{|0\rangle}\langle 0| = \boxed{\frac{1}{4}|0\rangle\langle 1| - \frac{i}{4}|0\rangle\langle 0|}$$

$$a^+\rho_2 = \frac{3}{4}\underbrace{a^+|0\rangle}_{|1\rangle}\langle 0| + \frac{1}{4}\underbrace{a^+|1\rangle}_{\sqrt{2}|2\rangle}\langle 1| + \frac{i}{4}\underbrace{a^+|0\rangle}_{|1\rangle}\langle 1| - \frac{i}{4}\underbrace{a^+|1\rangle}_{\sqrt{2}|2\rangle}\langle 0| =$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{2}}{4}|2\rangle\langle 1| + \frac{i}{4}|1\rangle\langle 1| - \frac{i}{4}\sqrt{2}|2\rangle\langle 0|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Tr}(a\rho_2) = -\frac{i}{4}}, \quad \boxed{\mathrm{Tr}(a^+\rho_2) = \frac{i}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle X\rangle = 0}$$

$$P = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^+)$$

$$\langle P\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\mathrm{Tr}\left[(a - a^+)\rho_2\right] =$$

$$= -\cancel{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\underbrace{\left[-\frac{i}{4} - \frac{i}{4}\right]}_{-\cancel{i}/2} = -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P\rangle = -\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{2\sqrt{2}}}$$